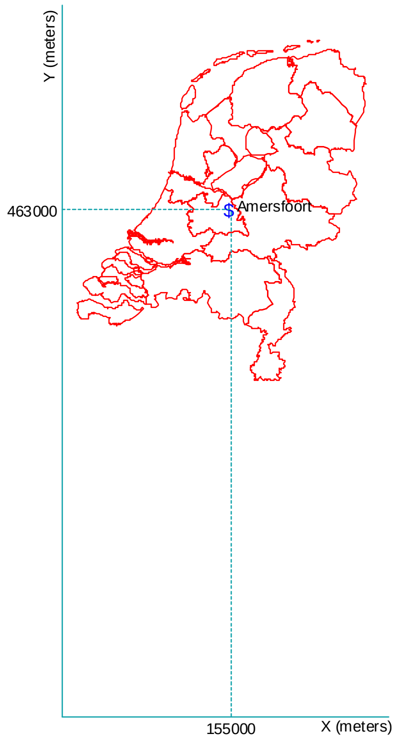
Wat is het Rijksdriehoeksstelsel?

Het Rijksdriehoeksstelsel (verder RD genoemd) is het nationale geodetische triangulatiesysteem van Nederland. Het wordt binnen Nederland voor bijna alle geografische data gebruikt. De basis van het RD systeem is een stereografische kaartprojectie gecentreerd op de Onze Lieve Vrouwentoren in Amersfoort. Op het zo verkregen projectievlak is een cartesiaans assenstelsel geconstrueerd.



Aanvankelijk lag de oorsprong van het systeem in Amersfoort. Omdat werken met kwadraten in vier kwadranten tot fouten leidde, heeft men in 1968 de oorsprong 155 kilometer naar het westen en 463 kilometer naar het zuiden verschoven. Nederland ligt nu in zijn geheel in het eerste kwadrant van het assenstelsel, en door de extreem grote Y-verschuiving is de grootst voorkomende x-waarde nog altijd kleiner dan de kleinst mogelijke y-waarde. Daardoor zijn alle voorkomende coördinaten nu positief, en x- en y-waarden zijn goed uit elkaar te houden.

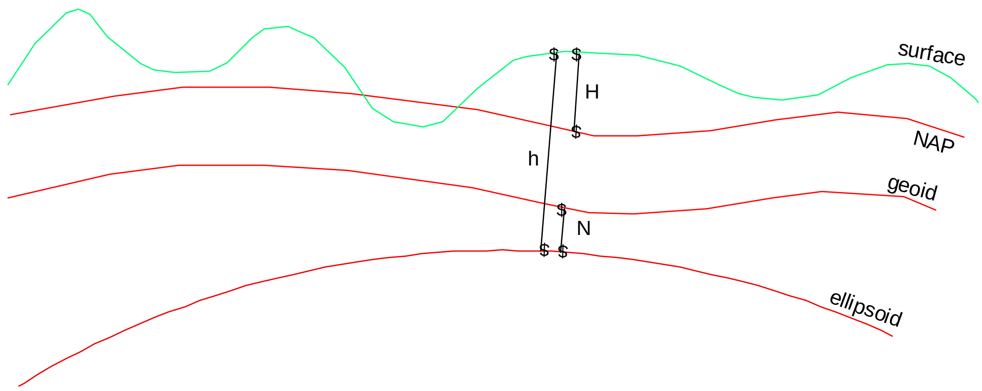
De voor RD gebruikte stereografische projectie is gebaseerd op de ellipsoïde van Bessel (1841). Het projectievlak raakt de aarde in Amersfoort. Aan de randen van Nederland nemen de (afstands)fouten toe. Om deze fouten zo veel mogelijk te beperken heeft men het raakvlak enkele meters in de aarde laten zakken. Daardoor raakt het vlak niet meer aan Amersfoort, maar snijdt het de aarde door in een cirkel met een straal van 122 kilometer. De afstandsfout is daardoor –92 millimeter per in de kaart gemeten kilometer in Amersfoort, en +92 millimeter per in de kaart gemeten kilometer in Zuid-Limburg.

Het Nederlandse hoogtesysteem (Normaal Amsterdams Peil (NAP))

Hoogten worden in Nederland gemeten in meters ten opzichte van Normaal Amsterdams Peil (NAP). Dit niveau is gebaseerd op en gemiddelde zeehoogte in Amsterdam tussen 1670 en 1710. Door de zeespiegelrijzing ligt het NAP momenteel ongeveer 1,5 meter onder het gemiddelde zeeniveau.

Het NAP-niveau ligt vast door middel van een hoogtemerk in Amsterdam. Vanuit dit punt is het NAP over Nederland verspreid door middel van waterpassen.

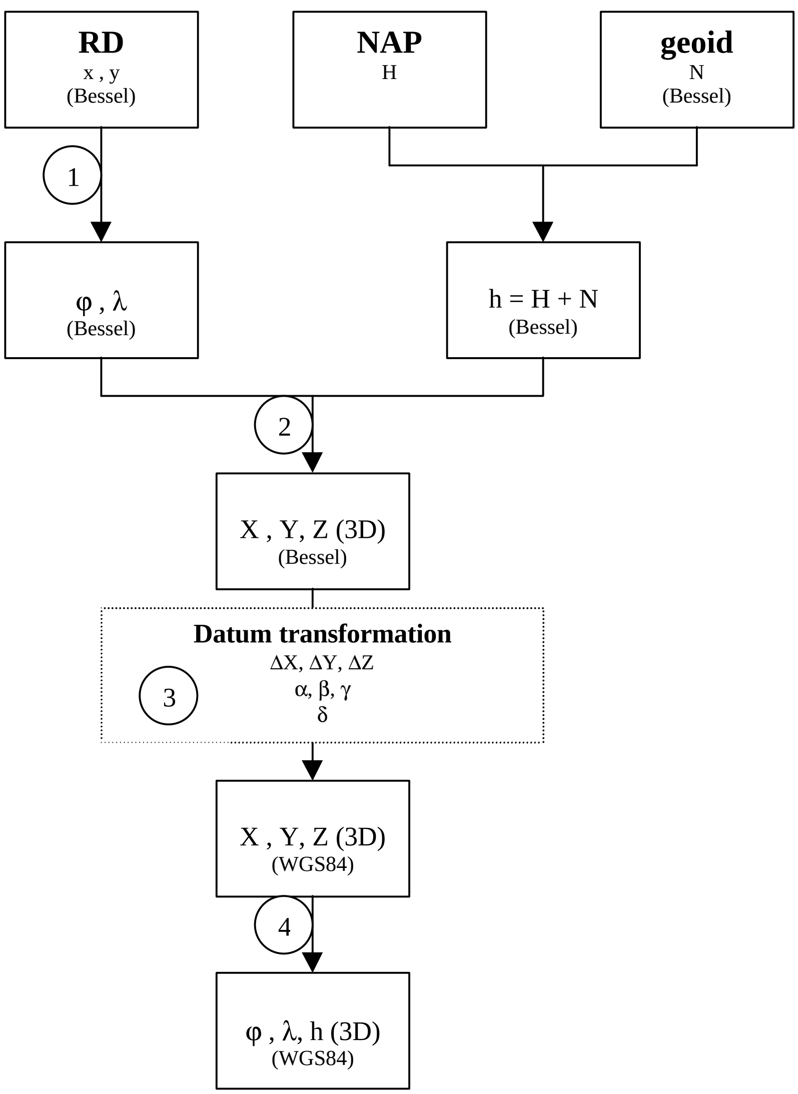
Het verband tussen NAP, de geoïde en de Bessel ellipsoïde is als volgt:



Aangezien Nederland vrij vlak is, is het verschil tussen NAP en de geoïde maximaal maar enkele millimeters groot. Ter vereenvoudiging van de formules worden het NAP en de geoïde aan elkaar gelijk gesteld.

Omrekenen van RD en NAP naar WGS84

Het volgende schema toont de relaties tussen RD en WGS84



Stap 0. De gebruikte constanten

De stereografische kaartprojectie in Nederland is een zogenaamde dubbelprojectie. Punten op de Bessel ellipsoïde worden eerst geprojecteerd op een bol met de conforme projectie van Gauss. Daarna worden de punten op de bol geprojecteerd op een plat vlak volgens de stereografische projectie. Daarbij worden de volgende constanten gebruikt:

Ellipsoïde van Bessel (1841)	a = 6 377 397.155m
Excentriciteit:	e = 0.081 696 8312 22
Basispunt Amersfoort, O.L.V.-kerk:	
Ellipsoïdische latitude	φ_0 = 52°.156 160 556
Ellipsoïdische longitude	λ_0 = 5°.387 638 889
Sferische latitude	B_0 = 52°.121 097 249
Sferische longitude	L_0 = 5°.387 638 889
Constanten voor de Gaussische projectie:	n = 1.000 475 856 68
	m = 0.003 773 953 832
Straal van de bol	R = 6382 644.571m
Constanten voor het RD-systeem	k = 0.999 9079
	x_0 = 155 000m
	y_0 = 463 000m

Stap 1a. Conversie van RD naar lat/long op de Bessel ellipsoïde

Gegeven x en y in RD worden de bijbehorende φ en λ als volgt berekend:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\sin a = \frac{x - x_0}{r}$$

$$\cos a = \frac{y - y_0}{r}$$

$$\Psi = 2\tan^{-1}\left(\frac{r}{2kR}\right)$$

$$\sin B = \cos a \cos B_0 \sin \Psi + \sin B_0 \cos \Psi$$

$$\sin \Delta L = \frac{\sin a \cdot \sin \Psi}{\cos B}$$

λ wordt derhalve: $\boxed{l = \frac{\Delta L}{n} + l_0}$

$$w = \ln \tan\left(\frac{1}{2}B + 45°\right)$$

$$q = \frac{w - m}{n}$$

$$j\,' = 2\tan^{-1}\left(\exp(q)\right) - 90^\circ$$ **(benaderde waarde van φ)**

Itereer vier keer om een betere waarde van φ te krijgen:

$$\Delta q = \frac{1}{2} e \ln\left(\frac{1 + e\sin j\,'}{1 - e\sin j\,'}\right)$$

$$\boxed{j = 2\tan^{-1}\left(\exp(q + \Delta q)\right) - 90^\circ}$$ (de eerste drie iteraties: φ′ = φ)

Dit zal een goede waarde van φ opleveren.
Controle punt:
x = 100 000m y = 400 000m
φ = 51°.587 1380 λ = 4°.593 9185

Stap 1b. Conversie van lat/long op de Bessel ellipsoïde naar RD

Gegeven φ en λ worden dde bijbehorende x en y in RD berekend door:

$$q' = \ln\tan\left(\frac{1}{2} j + 45^\circ\right)$$

$$\Delta q = \frac{1}{2} e \ln\left(\frac{1 + e \cdot \sin j}{1 - e \cdot \sin j}\right)$$

$$q = q' - \Delta q$$

$$w = nq + m$$

$$B = 2\tan^{-1}\left(\exp(w)\right) - 90^\circ$$

$$L = n(l - l_0)$$

$$\sin^2 \frac{1}{2}\Psi = \sin^2 \frac{1}{2}(B - B_0) + \sin^2 \frac{1}{2}\Delta L \cos B \cos B_0$$

$$\cos\frac{1}{2}\Psi = \left(1 - \sin^2 \frac{1}{2}\Psi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan\frac{1}{2}\Psi = \frac{\sin\frac{1}{2}\Psi}{\cos\frac{1}{2}\Psi}$$

$$\sin\Psi = 2\sin\frac{1}{2}\Psi\cos\frac{1}{2}\Psi$$

$$\cos\Psi = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\Psi$$

$$\sin a = \sin\Delta L \frac{\cos B}{\sin\Psi}$$

$$\cos a = \frac{\sin B - \sin B_0 \cos\Psi}{\cos B_0 \sin\Psi}$$

$$r = 2kR\tan\frac{1}{2}\Psi$$

Daaruit volgt: $\boxed{\begin{aligned} x &= r\sin\alpha + x_0 \\ y &= r\cos\alpha + y_0 \end{aligned}}$

Controle punt:
φ = 53°   λ = 6°
x = 196 105.283m   y = 557 057.739m

Stap 2a (= 4b). Van φ, λ en h op de ellipsoïde naar X, Y, Z

X, Y en Z zijn cartesiaanse coördinaten met de oorsprong in het zwaartepunt van de aarde. De Z-as valt samen met de rotatieas van de aarde. De X-as loopt door het snijpunt van de evenaar en de meridiaan door Greenwich.

$$W = \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}$$

$$N = \frac{a}{W}$$

$$X = (N + h)\cos\varphi\,\cos\lambda$$

$$Y = (N + h)\cos\varphi\,\sin\lambda$$

$$Z = (N - e^2 N + h)\sin\varphi$$

Stap 2b (= 4a). Van X, Y, Z naar φ, λ en h op de ellipsoïde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{1}{r}\left(z + e^2 N\sin\varphi\right)$$ (vier keer itereren, eerste benadering: $N\sin\varphi = z$)

$$\tan\lambda = \frac{y}{x}$$

$$h = r\cos\varphi + z\sin\varphi - a\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}$$

Stap 3a. Van X, Y, Z$_{\mathbf{(Bessel)}}$ naar X, Y, Z$_{\mathbf{(WGS84)}}$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{WGS} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{RD} + \begin{pmatrix} -593.032 \\ -26.000 \\ -478.741 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4.0772\cdot 10^{-6} & -9.0587\cdot 10^{-6}\,rad & -1.7439\cdot 10^{-6}\,rad \\ 9.0587\cdot 10^{-6}\,rad & -4.0772\cdot 10^{-6} & -1.9848\cdot 10^{-6}\,rad \\ 1.7439\cdot 10^{-6}\,rad & 1.9848\cdot 10^{-6}\,rad & -4.0772\cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - 3903453.148 \\ Y - 368135.313 \\ Z - 5012970.306 \end{pmatrix}$$

Stap 3b. Van X, Y, Z$_{\mathbf{(WGS84)}}$ naar X, Y, Z$_{\mathbf{(Bessel)}}$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{RD} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{WGS} + \begin{pmatrix} 593.032 \\ 26.000 \\ 478.741 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.0772 \cdot 10^{-6} & 9.0587 \cdot 10^{-6}\, rad & 1.7439 \cdot 10^{-6}\, rad \\ -9.0587 \cdot 10^{-6}\, rad & 4.0772 \cdot 10^{-6} & 1.9848 \cdot 10^{-6}\, rad \\ -1.7439 \cdot 10^{-6}\, rad & -1.9848 \cdot 10^{-6}\, rad & 4.0772 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - 3904046.180 \\ Y - 368161.313 \\ Z - 5013449.047 \end{pmatrix}$$

Controlepad

Een uitgewerkt controlepunt (De Universiteit van Delft):

RD:	X = 86346.784m	Y = 444659.972m	H = 30.809m (NAP)
Geoïde:	N = -0.113	h = H + N = 30.696m	
Bessel:	φ = 51.987053833	λ = 4.388054251	h = 30.696
Bessel:	x = 3924096.851	y = 301119.821	z = 5001429.896
WGS84:	x = 3924689.340	y = 301145.338	z = 5001908.687
WGS84:	φ = 51.986087342	λ = 4.387764732	h = 74.312

De geoïdische hoogte ten opzichte van WGS84: N = h – H = 43.503m